

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $a = (4 + 3i)^2 + (3 - 4i)^2$ este natural, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației $x^2 - 11x + m = 0$ sunt numere reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(7x) + \log_x 7 = 3$.
- 5p** 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -2)$, $B(-4, 4)$ și $C(-4, 0)$. Calculați aria triunghiului ABC .
- 5p** 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 - a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a + b)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3) \cdot X = A(5)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 3x - 3y + 6$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 14$.
- 5p** c) Determinați numărul natural n , știind că $\left(2^n + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+1} + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+2} + \frac{3}{2}\right) = 2^{20} + \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-2(3x^2 - 3x + 1)}{x^3(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0, 3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(3) + \dots + f(n))^{n^2}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)} dx = 1$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)} dt = x$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 3 - i$. Arătați că $z^2 - 6z + 10 = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6$. Determinați numărul real a , știind că $f(a) = f(a - 2)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 4x + 5) = \log_4(2x + 4)$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 16.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(3,3)$ și $C(7,3)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $ABCD$ este paralelogram.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x + 2 \sin \frac{5x}{3}$, unde $x \in (0, \pi)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a + b)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $A(n) = A(1)A(2)A(3) \cdot \dots \cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - \sqrt{3}(x + y) + 3 + \sqrt{3}$.
- 5p** a) Arătați că $\sqrt{3} * 0 = \sqrt{3}$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * y = (x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} * \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \dots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-x(x + 2)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(1) + g(2) + \dots + g(n)) = \frac{1}{e - 1}$, unde $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{(x + 2)^2}$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x+1) f(x) dx = 2$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 2 - \ln 2$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 e^x (x+1)^n (f(x))^n dx$.

Demonstrați că $I_n + 2nI_{n-1} = 3^n e - 1$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $2z - z^2 = 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 2m$, unde m este număr real. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m , știind că $f(x) > 0$ pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(\sqrt{x} + 1) + \log_5(\sqrt{x} - 1) = 2$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 32 de submulțimi.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,5)$ și $C(6,1)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x - \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 8$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a)A(b) = 2A(ab - a - b + 2)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q) = 4I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -\frac{3}{5}xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $x * y = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $\frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} \geq \frac{5}{3}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Calculați $\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{3}{3} * \dots * \frac{2020}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - \ln(x^2 + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(2x^2 - x + 2)}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră funcția $f: (-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{74}{3}$.

- 5p** b) Calculați $\int_{-3}^3 |x f(x)| dx$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că suma pătratelor elementelor mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n-1 < 2\}$ este egală cu 5.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 5$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că vârfului parabolei asociate funcției f are abscisa egală cu 3.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = \sqrt{8-x}$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu 10 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinați ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin mijlocul segmentului CD , unde punctul D este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Calculați $S = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \dots + \cos 2020\pi$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -4$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(x)A(y) - A(2xy)) = 0$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right) + A(2)A\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right) = nI_3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = (\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y})^5$.
- 5p a) Arătați că $2^5 * 3^5 = 5^5$.
- 5p b) Determinați numărul real x , știind că $2^5 * x^5 * (243x^5) = 100000$.
- 5p c) Se consideră numerele $M = 1^5 * 2^5 * \dots * 10^5$ și $N = 5^5 \cdot 11^5$. Demonstrați că $M - N = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1) - \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că graficul funcției f nu intersectează axa Ox .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{4}{3}$.

- | | |
|----|--|
| 5p | b) Calculați $\int_{-1}^1 x f(x) dx$. |
| 5p | c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2}$. |

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 3i$ și $z_2 = 5 - 6i$. Arătați că $2z_1 - z_2 = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 15$. Determinați numărul real m pentru care $f(m) + f(m+1) = 35$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 3^x - 3^{x+1} + 27 = 0$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 25.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$, $B(-2,6)$. Determinați numerele reale a și b , știind că, dacă $C(a,b)$, atunci $\overline{AC} = \overline{CB}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 4$. Știind că aria $\triangle ABC$ este egală cu 6, calculați lungimea laturii BC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 2x + (a+1)y + az = 3, \\ ax + 6y + 4z = a + 3 \end{cases}$ unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(a)) = (a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a .
- 5p b) Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4) - A(1)) \cdot A(a) = A(a) \cdot (A(4) - A(1))$.
- 5p c) Determinați numerele întregi a , pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0, y_0, z_0) cu x_0 , y_0 și z_0 numere întregi.
2. Pe mulțimea $M = (-10, 10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{100(x+y)}{xy+100}$.
- 5p a) Arătați că $3 * 0 = 3$.
- 5p b) Se consideră $f: M \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 11 ori } x} = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x(x-3)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f , în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2020$.
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui a , știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în exact trei puncte.

2. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}$.

5p a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

5p b) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} (f(x) - \ln x) dx$.

5p c) Determinați numărul real a , $a > e$, știind că $\int_e^a \ln x dx = 2a$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați partea reală a numărului complex $z = (1 + i\sqrt{3})^2 - (1 - i\sqrt{3})^2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 2x$. Arătați că $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) < 0$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A , care conțin exact 2 numere impare.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele M , N și P astfel încât $\overline{AM} = 2\overline{AB}$, $\overline{BN} = 2\overline{BC}$ și $\overline{CP} = 2\overline{CA}$. Știind că O este un punct oarecare din plan, arătați că $\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.
- 5p 6. Știind că $x \in (\pi, 2\pi)$ și $\cos 2x = \frac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + ay + 2z = 4 \\ 3x + ay + 2z = 1 \\ 2x + ay + 5z = b \end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = -3$.
- 5p b) Pentru $a = -1$ și $b = -2$, rezolvați sistemul de ecuații.
- 5p c) Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.
2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2} + 2$.
- 5p a) Arătați că $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1$, pentru orice $x, y \in G$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p c) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f: M \rightarrow G$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $(M, \cdot)$ la grupul $(G, *)$, unde $M = (0, +\infty)$ și „ $\cdot$ ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{-x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = -xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f(n))^n}{e^n (f(n+1))^n}$.
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{2}{x+1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - x) dx = 2 \ln 2$.

5p b) Calculați $\int_1^e \left(f(x) - \frac{2}{x+1} \right) \ln x dx$.

5p c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^1 2f(x)F(x)dx = \frac{1}{4} + \ln 4 + \ln^2 a$, unde F este primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați partea întreagă a numărului real $x = (\sqrt{2} - 1)^2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta de ecuație $y = 2x - 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{7-2x}$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(2, 5)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
- 5p 6. Calculați perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 2$, $AC = 3$ și $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$ și $(A(a))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr rațional q , matricea $A(q)$ este inversabilă.
- 5p c) Se consideră matricea $B(a) = A(a) - (A(a))^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p) + 5B(p) = O_3$.
2. Pe mulțimea $G = (0, 1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.
- 5p a) Arătați că $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.
- 5p b) Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p c) Știind că $(G, *)$ este grup, demonstrați că funcția $f: G \rightarrow M$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(M, \cdot)$, unde $M = (0, +\infty)$ și „ $\cdot$ ” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 1 + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați $m \in (0, +\infty)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M(m, f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x$.
- 5p c) Demonstrați că $x \ln x + \frac{1}{e} \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

5p a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(x) dx = \frac{1}{2}$.

5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați suma elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq \sqrt{5}\}$.
- 5p 2. Determinați numerele reale m și n , știind că $f(1) = 2$ și $f(2) = 1$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 2 \cdot 4^x - 8 = 0$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor un număr prim.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul O , intersecția diagonalelor acestuia. Arătați că $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.
- 5p 6. Determinați $\sin x$, știind că $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ și $\cos x = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a-3 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ (a-3)x + ay + z = 2a-1, \\ 3x + (2a-1)y + z = 1 \end{cases}$ unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 5$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.
- 5p c) Determinați numărul real a , știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{3}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = \frac{26}{9}$.
- 5p c) Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” sunt numere naturale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4 \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficului funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n , $n \geq 2$, ecuația $f(x) - n = 0$ are două soluții reale distincte.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 f(x) e^{-x} dx = 4$.

- | | |
|----|---|
| 5p | b) Calculați $\int_1^e \frac{1}{x^2} f(\ln x) dx$. |
| 5p | c) Arătați că $\int_0^1 f(x) F(x) dx = 2(e-3)^2$, unde $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0) = 0$. |

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} < 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Determinați produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{x-2} + 3^{x+2} = 91$.
- 5p 4. Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^9$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(3,2)$. Determinați ecuația dreptei OG , știind că G este centrul de greutate al triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AB = 2$ și $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 7$.
- 5p b) Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a .
- 5p c) Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$.
- 5p a) Arătați că $2 \circ 2 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y \circ z = \left(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x, y, z \in M$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} = \frac{1}{54}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x))$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{6}$.

- | | |
|----|---|
| 5p | b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x} \ln x dx = \frac{e^2 - 7}{4}$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale a , $a > 1$ pentru care $\int_1^a f(x) e^x dx = e^a - 3e$. |

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați partea reală a numărului complex $z = (3 + 2i)(3 - 2i) - (4 - i)$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 3$. Calculați $(f \circ g)(2)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2^{6x}} = 16$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor un număr impar.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AD = 6$, $AB = 4$ și $m(\angle ADC) = 120^\circ$. Determinați modulul vectorului $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AD}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 60$, $AC = 80$ și $BC = 100$. Calculați lungimea înălțimii AD a triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & -2 \\ a-1 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (2a+1)x + y - 2z = a \\ (a-1)x - y + z = a+1, \\ 2ax - 2y + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care există y_0 și z_0 , numere reale, astfel încât $(2, y_0, z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = \sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$.
- 5p a) Arătați că $2 * 64 = 4$.
- 5p b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p c) Determinați $x \in G$ care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2) + 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(5) = 6$.
- 5p b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1} \right)^n$.
- 5p c) Demonstrați că ecuația $f'(x) = 0$ are trei soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.
- 5p a) Determinați primitiva G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (1+e^x)f(x)$ pentru care $G(0) = 0$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\int_{-1}^1 f(x) \cos x dx = 0$. |

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt{7}(\sqrt{6}+1) - \sqrt{6}(\sqrt{7}+1) = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 2$. Demonstrați că $f(x+1) - f(x) = g(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui M care au cel puțin trei elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $A(1, 2)$, $B(4, 5)$ și $D(-3, 2)$. Determinați ecuația dreptei MN , știind că segmentul MN este linia mijlocie a trapezului $ABCD$.
- 5p 6. Calculați $\sin 2x$, știind că $(2 \sin x + \cos x)^2 = 2 + 3 \sin^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$, unde $i^2 = -1$ și a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = i$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p c) Calculați $\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12$.
- 5p a) Arătați că $x * 1 = 3$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $0 * x = -9$.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $x * y = 3$, atunci $(x-1)(y-1) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că axa Ox este tangentă graficului funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n , ecuația $f(x) = n$ are două soluții reale distincte.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{e^x} dx = 1$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_1^2 x^3 f(x^2) dx = \frac{e(e-1)(e^2 + e + 1)}{2}$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\int_1^e f(x) dx + \int_1^e e^x \ln x dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $N = (\sqrt{5} + \sqrt{13})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{13})^2$ este pătratul unui număr natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că $(f \circ f)(1) + f(1) = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 4^{1-x} = 4$.
- 5p 4. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{0, 5, 7\}$.
- 5p 5. Se consideră punctul G , centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul M , mijlocul segmentului AG . Demonstrați că $6\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- 5p 6. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC , știind că $4\mathcal{A}_{ABC} = AB \cdot AC$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -15$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.
- 5p c) Demonstrați că matricea $M = A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2020}$.
- 5p a) Arătați că $x * (-x) = \sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x+1) * (-x) = \sqrt[3]{2021}$.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , există un unic număr real x pentru care $x * x * x = a$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x^2+3x+5} dx = 4$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Calculați $\int_{-4}^1 f(x) dx$. |
| 5p | c) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = 6 - 2\sqrt{5}$. |

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 2$ și $b_3 - 4b_2 = -8$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(f(1), 1)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x + 1}$.
- 5p 4. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre care au proprietatea că pătratul cifrei zecilor este egal cu diferența dintre cifra unităților și cifra sutelor.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 1)$ și $H(3, 2)$. Știind că H este ortocentrul triunghiului ABC , determinați panta dreptei BC .
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
- 5p c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1, 1)$, $B(m, m^2)$ și $C(m+1, (m+1)^2)$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m , știind că triunghiul ABC are aria egală cu 1.
2. Pe mulțimea $G = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = 2^{\ln x \cdot \ln y}$.
- 5p a) Arătați că $x * 1 = 1$, pentru orice $x \in G$.
- 5p b) Determinați $f \in G$, știind că f este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p c) Determinați $x \in G$ pentru care $x * \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + x - 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{e^x + x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 1 + \ln(1 + \sqrt{2})$.

- 5p** **b)** Calculați $\int_{-1}^1 |x f(x)| dx$.
- 5p** **c)** Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul complex z , pentru care $z = 3\bar{z}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că numerele $f(0)$, $f(2)$ și $f(1)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(-x) = \log_3(x^2 - 2x - 2)$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A .
- 5p** 5. Se consideră punctele A , B , C și D , astfel încât $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $BC = R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(a)) = 1$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Se consideră matricea $B(a) = A(a) - I_3$, unde a este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real a , $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = O_3$.
- 5p** c) Determinați numărul natural nenul n , știind că suma elementelor matricei X pentru care $A(2) \cdot X = A(1) + A(2) + \dots + A(n)$ este egală cu 21.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2 = 13$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $(x * x) * x^2 = 61$.
- 5p** c) Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a * 1$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(x+1)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x$.
- 5p** c) Demonstrați că $x^5 + 2\sqrt{x^{10}+3} \geq 3$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x$.

5p a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) - \ln x) dx = \frac{26}{3}$.

5p b) Calculați $\int_1^2 (f(x) - x^2) dx$.

5p c) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{3 - 4\ln^2 2}{8}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{7}\}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + a$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2bx + 1$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că parabolele asociate celor două funcții au același vârf.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2$.
- 5p 4. Arătați că **nu** există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și $C(5,0)$. Arătați că punctul $H(4,7)$ este ortocentrul triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați $\cos x$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $2(\cos^4 x - \sin^4 x) = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p b) Arătați că matricea $I_3 - \frac{1}{11}A$ este inversa matricei B .
- 5p c) Dați exemplu de trei matrice $U, V, T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U + V + T = B$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + a$, unde a este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real a pentru care $(-1) * 1 = 0$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $a \in [12, +\infty)$, atunci mulțimea $[3, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} + f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) \right)^{\sqrt{n}}$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Demonstrați că $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{8}$.

5p c) Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1) = 0$. Calculați $\int_0^1 F(x) dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că, dacă $z^2 + z + 2 = 0$, unde z este număr complex, atunci $z^2 + \frac{4}{z^2} = -3$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{2x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
Arătați că $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} - 3^x = 2^{x+2} - 2^{x+1}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A = \{\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{25}\}$, numerele 3, 4 și a să reprezinte lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M și N astfel încât $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ și $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.
Demonstrați că punctele D , M și N sunt coliniare.
- 5p 6. Arătați că, dacă ABC este un triunghi oarecare, atunci $\cos A < \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + my + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(m)) = m - 9$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0, 0, 0)$.
- 5p c) Pentru $m = 9$, se consideră (x_0, y_0, z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0 , y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Calculați $\frac{x_0^2 + y_0^2 - z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$.
- 5p a) Arătați că $2 * (-1) = 23$.
- 5p b) Demonstrați că $e = -4$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Pentru $r \in \{0, 1, 2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu 3. Determinați numerele $r \in \{0, 1, 2\}$ pentru care $A(r)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(e^x - e)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = xe^x - e$, $x \in (-1, +\infty)$.

5p	b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f , în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
5p	c) Determinați punctul de extrem al funcției f .
	2. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2+1}$.
5p	a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\ln(x+2)} dx = \frac{\pi}{4}$.
5p	b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.
5p	c) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) + \frac{\arctg x}{x+2} \right) dx = \frac{\pi}{4} \ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că, dacă $z = 3 + i$, unde z este număr complex, atunci $z^2 - 6z + 10 = 0$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x - 6$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+3} = x+1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie un număr prim.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(3, -1)$. Știind că punctul M este simetricul lui A față de B și punctul N este simetricul lui B față de M , determinați coordonatele punctului N .
- 5p 6. Arătați că, dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin x + \cos x = \cos 2x$, atunci $\sin x - \cos x = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați rangul matricei $B = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) - I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6$.
- 5p a) Arătați că $1 * 1 = 3$.
- 5p b) Arătați că $x * y \neq 2$, pentru orice numere raționale x și y .
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2\ln(x+1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x(x+2)}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați numărul real $a \in (-1, +\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 3x + 2020$.
- 5p c) Demonstrați că $(x+1)^2 \geq 2\ln(x+1) + 1$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 f^2(x) dx = 15$.

- 5p** | **b)** Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
- 5p** | **c)** Arătați că $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n , $n \geq 3$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și rația $q = \sqrt{5}$. Calculați partea întreagă a lui b_4 .
- 5p 2. Se consideră funcția bijectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și f^{-1} .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x^2 + x + 1) - \log_2(x^2 - x + 2) = 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 11.
- 5p 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} - 2\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$.
- 5p 6. Arătați că, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x$, atunci $x = \frac{\pi}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ 2x + (m+1)y + z = 2 \\ x + y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru $m = -3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real m , sistemul de ecuații are cel mult o soluție.
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\bar{z}_1 - \frac{1}{2}\bar{z}_2$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z .
- 5p a) Arătați că $(1+i) \circ (1-i) = 1$.
- 5p b) Se consideră $H = \{2+bi \mid b \in \mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Se consideră numărul complex z_0 . Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0 \circ z$ este real.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$, $x \in (1, +\infty)$.

- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, ecuația $f(x) = a$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^4 e^x f(x) dx = 27$.
- 5p** b) Calculați $\int_1^e f(\ln x) dx$.
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $A = z(2 + 3i) + \bar{z}(2 - 3i)$ este real, pentru orice număr complex z , unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z .
- 5p 2. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 7$. Arătați că $f(\sqrt{2}) \cdot f(1 + \sqrt{2}) \cdot f(2 + \sqrt{2}) \cdots f(10 + \sqrt{2}) = 0$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 + x - 2) = 1 + \lg \frac{x-1}{2}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie mai mare decât 51.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 6)$, $B(-3, -1)$ și $C(-2, -2)$. Arătați că punctul $M(1, 2)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .
- 5p 6. Se consideră R , raza cercului circumscris triunghiului ABC și r , raza cercului înscris în triunghiul ABC . Știind că $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{rR}$, arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + mz = 4 \\ 4x + y + mz = 6 \\ x - my - z = -1 \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 2$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0} = x_0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $2 * (-2) = 0$.
- 5p b) Verificați dacă $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$. Arătați că $f(x) * f(y) = f(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$.
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f(x) dx = \frac{\pi}{8}$.
- 5p** b) Pentru fiecare număr natural n , considerăm numărul $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 0$, pentru care $\int_0^a x f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $z = (1 - i\sqrt{2})(1 + i\sqrt{2})$ este natural, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că $f(x) + f(1-x) = 7$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 5^{-x} = 2$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A , care îl conțin pe 1.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-4, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta OM .
- 5p** 6. Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sin B = \cos B$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $A = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 9}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2020 = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3 - 1)(y^3 - 1)} + 1$, pentru orice $x, y \in A$.
- 5p** c) Determinați $x \in A$ pentru care $x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\frac{1}{x-2} > \ln \frac{x}{x-1}$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (x^3+1) f^2(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$. Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Arătați că $z^2 - 4z + 5 = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul $M(0, 2)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x = \sqrt[3]{x^3 + 2x}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ și $C(4, a)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB .
- 5p** 6. Măsurile unghiurilor A , B și C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Demonstrați că măsura unghiului B este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + \ln x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 4(x + y) + a$, unde a este număr real.
- 5p** a) Pentru $a = 10$, arătați că $1 * 2 = 0$.
- 5p** b) Pentru $a = 20$, arătați că $e = 5$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $a \in [20, +\infty)$, atunci mulțimea $H = [4, +\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 6^x - 3^x + 2^x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(0) = \ln 4$.
- 5p** b) Se consideră tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f . Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, \ln(16e))$ este situat pe această tangentă.
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 3} - \frac{2}{x^2 + 3}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 (x^2 + 3) f(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 1 - \ln \frac{4}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este egală cu 30. Determinați a_2 . |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Arătați că $(f \circ f)(3) = 9$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-6) = 6 - \log_2(x+6)$. |
| 5p | 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. |
| 5p | 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul D mijlocul laturii AC și punctul E mijlocul segmentului BD . Arătați că $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{4}$ și $B = \frac{5\pi}{12}$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC . |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ ax + 4y + z = 6 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1)) = 0$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2. |
| 5p | c) Determinați numărul real a , știind că sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e = \frac{3}{2}$. |
| 5p | a) Demonstrați că $x * y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x} * x * \frac{1}{x} = x * \frac{1}{x} * x$. |
| 5p | c) Arătați că nu există numere întregi x și y , astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „*”. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 8 \ln x + 12 - 8 \ln 2$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-2)^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3, 3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f . |

5p	c) Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât punctul $M(a, b)$ este situat pe graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 8\ln 2 + 8\ln x$ și punctul $N(a, c)$ este situat pe graficul funcției $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 8x - 12$. Demonstrați că $b \geq c$, pentru orice $a \in [2, +\infty)$. 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.
5p	a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + 4) f(x) dx = -\frac{11}{3}$.
5p	b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty, 0]$.
5p	c) Pentru fiecare număr natural n , se consideră $I_n = \int_1^2 x^n f(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\infty$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Arătați că numărul $a = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$ este natural.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Arătați că $(f \circ f)(1) = f(2) + 2$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2} = 3 \cdot 3^x$.
5p	4. Determinați numărul natural nenul n , știind că mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ are exact 10 submulțimi cu două elemente.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1, 0)$, $N(7, 0)$ și $A(a, 3)$, unde a este număr real. Știind că $AM = AN$, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5.
5p	6. Se consideră $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3\cos x - 2 = 2\cos 2x$. Calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & 2a-5 & a-2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + (2-a)y + az = 1 \\ ax + y + z = 2-a \\ ax + (2a-5)y + (a-2)z = -4 \end{cases}$, unde a este număr real.
5p	a) Arătați că $\det(A(0)) = 3$.
5p	b) Demonstrați că $\det(A(a)) = (a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a .
5p	c) Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \log_2(2^x + 2^y)$.
5p	a) Arătați că $0 * 0 = 1$.
5p	b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
5p	c) Determinați numărul real x pentru care $(x * x) * x = 3 + \log_2 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
5p	c) Demonstrați că, pentru orice $m \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 x \cdot \frac{1}{f(x)} dx = \frac{31}{3}$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$, unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_{-1}^1 x^{2n-1} f(x) dx$. Demonstrați că
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 7 + \sqrt{7}\}$.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care vârful parabolei asociate funcției f are ordonata strict mai mare decât 0.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} = x-3$.
5p	4. Determinați numărul submulțimilor cu cel mult 2 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a paralelei prin A la OB cu paralela prin B la OA .
5p	6. Arătați că $\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x} = 1$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 2a & 0 \\ -a & 1+2a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
5p	b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b .
5p	c) Demonstrați că, dacă a , b și c sunt numere reale pentru care $A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) = A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c) = 1$.
	2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
5p	a) Arătați că $3 * 4 = 5$.
5p	b) Determinați $x \in M$ pentru care $x * \sqrt{5} < x + 1$.
5p	c) Demonstrați că există o infinitate de perechi (m, n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m , n și $m * n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
5p	c) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
5p	a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3}$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$. |
| 5p | c) Arătați că $\int_{-1}^1 x \ln(f(x)) dx = 2 \ln 2 - 1$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = (1 + 6i)^2 + (3 - 2i)^2$ este întreg negativ, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax$, unde a este număr real astfel încât $f(1) = f(5)$. Arătați că $f(2) = f(4)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x^2 - 2) = 2\log_3(x + 1)$.
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-4, 3)$ și C , astfel încât $AOBC$ este paralelogram. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel.
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$ pentru care $2\sin x \sin(\pi - x) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)A(1) = A(1)A(a)$.
- 5p c) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.
2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3}$.
- 5p b) Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, $f(x) = \hat{4} \circ x$ este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$, $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției f intersectează axa Oy .
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(4) + f(6) + \dots + f(2n))^n$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-2}{x^2+4}$.

5p a) Arătați că $\int_0^2 (x^2+4)f(x)dx = 0$.

5p b) Calculați $\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)dx$.

5p c) Demonstrați că $\int_1^x f(t)dt \geq 0$, pentru orice număr real x .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $z^2 - z - i = -1$.
- 5p** 2. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care ecuația $x^2 - 3x + 3 - n = 0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(25x) + \log_x 5 = 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 sau cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$, $B(4, 2)$ și $C(3, 0)$. Calculați aria triunghiului ABC .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x - \sin(\pi - x) + \cos x + \cos(\pi - x) + \operatorname{tg} 2x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
Arătați că $E\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A + I_3) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A \cdot A \cdot A = O_3$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = X \cdot A$, atunci există numerele reale a , b și c , astfel încât $X = aI_3 + bA + cA \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = |x - y|$.
- 5p** a) Arătați că $(5 * 2) * 1 = 2$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p** c) Demonstrați că $(a * b) + (b * c) \geq a * c$, pentru orice numere reale a , b și c .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $x - 1 \leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f^2(x) dx = 4$.

5p | **b)** Calculați $\int_0^1 \ln(f(x)) dx$.

5p | **c)** Demonstrați că există un singur număr real x , $x \in [0, +\infty)$, pentru care $\int_0^x e^{f(t)} dt = 2021$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră un număr complex z care are proprietatea $z^2 = 1 - i$. Arătați că $z^4 + 2i = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+2) + \log_5(2x-1) = 2$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 9.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$ și $C(4,5)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0,1)$ pentru care $4\cos x \cos(\pi - x) + 3 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 6$.
- 5p** b) Arătați că $A \cdot B + B = B \cdot A$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y , știind că $(x+1)A \cdot B + (y-2)B \cdot A = B \cdot B \cdot B$.
2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x * y = x^y$.
- 5p** a) Arătați că $2 * 4 = 4 * 2$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” **nu** este comutativă.
- 5p** c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2 * 2) * n < 64$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x^2 + x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 0$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 e^x |f(x)| dx$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul complex z , pentru care $z - 2\bar{z} = -2 + 6i$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m$, unde m este număr real pozitiv. Determinați numărul real pozitiv m pentru care numerele $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-1) = \log_5(3x+1)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A .
- 5p 5. Se consideră punctele A , B , C și D , astfel încât $2\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AC}$. Demonstrați că $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de 30° . Arătați că lungimea laturii BC este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(m) + A(-m)) = 8$, pentru orice număr real m .
- 5p b) Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m) \cdot A(m) = A(0)$.
- 5p c) Demonstrați că $A(1) - A(2) + A(3) - A(4) + \dots + A(2n-1) - A(2n) = n(A(-1) - A(0))$, pentru orice număr natural nenul n .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.
- 5p a) Arătați că $\frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x * (-x)) * ((-x) * x) = 24x$.
- 5p c) Demonstrați că $x * \frac{1}{x} \geq 6$, pentru orice număr real nenul x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x}$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{e^{2x}+2}$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \ln x$.

5p a) Arătați că $\int_1^{\sqrt{2}} (f(x) + \ln x) dx = \frac{3}{4}$.

5p b) Calculați $\int_1^e x(x^3 - f(x)) dx$.

5p c) Arătați că $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} f(\sqrt{x}) dx = \frac{2e^3 - 5}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră o funcție impară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x))^2$ este pară.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x} - \sqrt{2} \cdot 2^x = 2^{x+1} - 2\sqrt{2}$.
- 5p** 4. Determinați termenul care îl conține pe x^8 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** 5. În planul triunghiului ABC se consideră punctul M , astfel încât $2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Determinați numărul real k , știind că $\overline{BC} = k \cdot \overline{CM}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin 2x + 6\cos x - \sin x - 3 = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $M(m) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & m & -m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real m , rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.
- 5p** c) Determinați numărul real m , $m \neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A .
2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.
- 5p** a) Arătați că $(2+i) \circ (2-i) = 9$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a , numărul $A = (-1 + (a+1)i) \circ (-1 + (a-1)i)$ este real strict mai mic decât 0.
- 5p** c) Determinați numerele complexe z pentru care $z \circ z = -5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+3}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x))$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (e^x f(x) - 2) dx = -\frac{2}{3}$.

- 5p** | **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x) dx$.
- 5p** | **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n + 1 < 10\}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x + \sqrt{x - 5} = 7$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să **nu** fie multiplu de 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 4)$ și $B(-1, 3)$. Determinați coordonatele punctului C astfel încât $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB = 4$, $AC = 5$ și aria egală cu 6. Calculați cosinusul unghiului A .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a+1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + (a+1)y + az = 6a + 3 \\ x + y + (a+1)z = 4a + 7 \\ 2x + ay + z = 2a + 6 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(a)) = 2(a^2 + 1)$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $A(a) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(a)$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluția sistemului de ecuații, atunci x_0 , y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{2(x+y)}{xy+2}$.
- 5p** a) Arătați că $x * 0 = x$, pentru orice $x \in M$.
- 5p** b) Arătați că $x * y < 2$, pentru orice $x, y \in [1, +\infty)$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule pentru care $m * n$ este număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = e^x(x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$.
- 5p** c) Demonstrați că graficul funcției f intersectează orice dreaptă paralelă cu axa Ox în cel mult un punct.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 2$.

- 5p** | **b)** Calculați $\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \ln(f(t)) dt = +\infty$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați produsul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt[3]{7} < x \leq \log_2 21\}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d de ecuație $y = 5x + 2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 9^x - 3^{2x} - 3 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte.
- 5p** 5. Se consideră punctul M în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Arătați că patrulaterul $AMBC$ este paralelogram.
- 5p** 6. Calculați $\operatorname{tg} x$, știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\frac{8}{17}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x + y + az = -5 \\ x - y - az = 10 \\ (2-a)x + y + z = 1-a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.
- 5p** c) Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) și x_0 este număr întreg.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{5}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 5 = 5$.
- 5p** b) Determinați numărul real x , $x \geq 0$, pentru care $\sqrt{x} * \sqrt{x} = 5$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui a , $a \neq 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” este strict mai mic decât 0.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 1 + \ln(x+1) - \frac{2}{x+1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.
- 5p** c) Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției f , sunt concurente.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx = 7$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

5p c) Știind că $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1} + 4$ este o primitivă a funcției f ,
arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)dx = 32$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} > \frac{3}{4}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 18$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției $f \circ f$ cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x} - 2^{2-x} + 2^{5-x} = 9$.
- 5p** 4. Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a, 1)$ și $B(-2, 5)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei de ecuație $y = 2x + 3$.
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC , știind că $\operatorname{tg} C = 1$ și că triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 3.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(3)) = 10$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr natural m , $m \geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{xy - 4}{x + y - 4}$.
- 5p** a) Arătați că $8 \circ 8 = 5$.
- 5p** b) Arătați că $(x + 2) \circ (y + 2) > (x + y) \circ 4$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $x \in M$ și n este număr natural, $n \geq 2$, astfel încât $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x} = 2^n - \frac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 3) - 2\ln(x^2 - 9)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3(1-x)}{x^2 - 9}$, $x \in (3, +\infty)$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} ((x - 3) f(x)) = 0$.

2. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

5p a) Arătați că $\int_1^{\frac{3}{2}} \left(f(x) - \frac{x^2}{x^2 - 4} \right) dx = \frac{5}{8}$.

5p b) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) + f(-x)) dx = 4(1 - \ln 3)$.

5p c) Determinați $a \in (0, \sqrt{3})$, pentru care $\int_a^{\sqrt{3}} \sqrt{x - f(x)} dx = \sqrt{3} - 1$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați modulul numărului complex $z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i)$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 20$. Calculați $(g \circ f)(2)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5} = \frac{1}{16}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.
- 5p** 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 4$, $BC = 6$ și măsura unghiului ABC de 120° . Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$, $AC = 16$ și $BC = 20$. Arătați că $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4)) = 5$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.
- 5p** c) Pentru $a = 3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2 = x_0 + y_0$.
2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$.
- 5p** a) Arătați că $4 * 3 = 2$.
- 5p** b) Arătați că $e = 9$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați $x \in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) + 3$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 2x(2x^2 - 13)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{f(x)-3} = \frac{1}{30}$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \arctg x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\arctg x} dx = 3$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$. |

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt[3]{(6-\sqrt{2})^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 5$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2mx - 6$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că graficul funcției f intersectează axa Ox într-un punct în care și graficul funcției g intersectează axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 4x + 12) = \log_3 27$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4, 0)$, $B(-1, 3)$ și $C(1, m)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în B .
- 5p 6. Arătați că $\sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{23\pi}{3} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+b)y + z = 0 \\ x + y + (1+c)z = 0 \end{cases}$ unde a , b și c sunt numere reale nenule.
- 5p a) Arătați că $\det(A(-2, 0, 2)) = -4$.
- 5p b) Arătați că, dacă $abc + ab + ac + bc \neq 0$, atunci matricea $A(a, b, c)$ este inversabilă.
- 5p c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0, 0, 0)$, atunci numărul $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ este întreg.
2. Pe mulțimea $G = (0, 2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$ și se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 2)$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $1 * 1 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right) * f\left(\frac{2}{3}\right) * f\left(\frac{3}{4}\right) * \dots * f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \frac{2n}{n+1}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 3$.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- 5p b) Arătați că funcția f este convexă pe $(0, 1)$.

- 5p** c) Demonstrați că $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.
- 5p** a) Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1$.
- 5p** b) Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.
- 5p** c) Demonstrați că $I_n \leq \ln 2$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - 5$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul $M(1, 2)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 1) = \log_4 x + \log_4(x + 1)$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3, 4)$, $N(0, 1)$ și $P(3, 0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta MN .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în C . Arătați că $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Determinați matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB = A(a) - 2I_3$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n) \cdot A(-n)) > 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- 5p** a) Arătați că $2 * 0 = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a \leq b$, atunci $a * b = b$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = 10$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are soluție.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 3}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = 2$.

- 5p** **b)** Arătați că $\int_1^2 g(x) dx = \ln \frac{9}{5}$, unde $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$.
- 5p** **c)** Se consideră numerele reale a și b , cu $0 \leq a < b$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați media aritmetică a numerelor reale $a = 2021 - \sqrt{2}$ și $b = 2021 + \sqrt{2}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(\sqrt{x} + 3) + \log_3(\sqrt{x} - 3) = 2$.
- 5p** 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 16 submulțimi.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3, 0)$, $N(8, 3)$ și $P(6, 3)$. Determinați coordonatele punctului Q , știind că $\overline{MN} + \overline{MP} = \overline{MQ}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$. Arătați că $A = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - m(x + y) + m(m + 1)$, unde $m \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Pentru $m = 1$, arătați că $2 \circ 2 = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă $2 \circ 1 = 5$, atunci $2 \circ 5 = 1$.
- 5p** c) Determinați numărul real x , știind că $(mx^3) \circ (-mx^2) = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2 - 4 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2x}{x^4 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{11}{5}$.

5p b) Se consideră $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p c) Se consideră funcția $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0) = 0$. Arătați că $\int_0^1 xG(x) dx = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $N = \log_2 6 - 2\log_2 3 + \log_2 24$ este natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$. Arătați că dreapta de ecuație $y = 2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{3x - 1}$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A , știind că mulțimea A are exact 15 submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele M , N și P mijloacele segmentelor BC , BM , respectiv CM . Arătați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$, unde a , b și c sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0, 1, 2)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(a, b, c)) = (b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a , b și c .
- 5p c) Demonstrați că, dacă m , n și p sunt numere naturale, cu $m < n < p$, astfel încât determinantul matricei $A(m, n, p)$ este număr prim, atunci numerele m , n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + \hat{2}X + b$, unde $a, b \in \mathbb{Z}_3$.
- 5p a) Pentru $a = \hat{1}$ și $b = \hat{2}$, arătați că $f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$.
- 5p b) Determinați perechile (a, b) , cu $a, b \in \mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X + \hat{2}$.
- 5p c) Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$, există $x, y \in \mathbb{Z}_3$, cu $x \neq y$, astfel încât $f(x) = f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2+4x+5} dx = 7$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 (f^2(x) - 4) dx = 4 \ln 2$.

5p c) Se consideră numerele reale a și b , cu $0 \leq a < b$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_2 = 2$ și $b_4 = 4$. Determinați b_6 .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe dreapta $y = 3x$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.
- 5p 4. Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.
- 5p 5. Segmentele AB și $A'B'$ au același mijloc. Demonstrați că $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \vec{0}$.
- 5p 6. Demonstrați că, în orice triunghi ABC , are loc relația $AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$$
 și matricea $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(X(0,1)) = 1$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b , sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p c) Demonstrați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = (x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$.
- 5p a) Arătați că $5 * 10 = 17$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x * x = x * x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f , este paralelă cu dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \right)$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 \left(2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \frac{\pi}{4}$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

- 5p** c) Arătați că, pentru orice numere reale a și b , cu $a < b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx > 0$, pentru orice primitivă F a funcției f .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați modulul numărului complex $z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i)$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 20$. Calculați $(g \circ f)(2)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-5} = \frac{1}{16}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 8.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 4$, $BC = 6$ și măsura unghiului ABC de 120° . Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului BD .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$, $AC = 16$ și $BC = 20$. Arătați că $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(4)) = 5$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.
- 5p c) Pentru $a = 3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2 = x_0 + y_0$.
2. Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$.
- 5p a) Arătați că $4 * 3 = 2$.
- 5p b) Arătați că $e = 9$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „*”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) + 3$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 2x(2x^2 - 13)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{f(x)-3} = \frac{1}{30}$.
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \arctg x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\arctg x} dx = 3$.

- 5p** | **b)** Determinați numărul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \frac{\pi}{a} - \sqrt{3}$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianța 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $8 - 6\sqrt{6} + 6(\sqrt{6} - 1) = 2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $(f \circ f)(0) = 4$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3 \cdot 2^{2x} + 4^x = 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului 6.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 3x - 2$ și punctul $A(a, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul A aparține dreptei d .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB = 10$ și $\cos A = 0$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 50.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $A(n) \cdot A(n+1) \cdot A(n+2) \cdot A(n+3) = A(2n^2)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{2x}{y+2} + \frac{2y}{x+2}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 0 = 1$.
- 5p** b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Determinați $x \in M$, x nenul, pentru care $x * \frac{4}{x} = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + \frac{x}{e^x - x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice $m \in (1, 2]$, ecuația $f(x) = m$ are soluție unică.

-
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x + \sqrt{x^2 + 9}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^5 \left(f(x) - \sqrt{x^2 + 9} \right) dx = 0$.
- 5p b) Arătați că $\int_0^4 \frac{x}{f(x) + x - 3} dx = 2$.
- 5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$. Demonstrați că
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2i(3-i) - 6i = 2$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(-1) = f(1)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x-1} = 9^x$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 3.
- 5p** 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,-1)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{AC} = 2\overline{BC}$.
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin 2x - 2 \operatorname{tg} x \cdot \sin \frac{2x}{3}$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x & 1 \\ 1-x & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 2$.
- 5p** b) Arătați că $A(1) \cdot A(x) - A(x-1) = 2I_3$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A(1) \cdot A(1) \cdot A(x) = 3A(1) + 2I_3$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy(x+y)}{xy+1}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
- 5p** b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $\frac{1}{m} * \frac{1}{n} = \frac{1}{16} \cdot (m * n)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x) dx = \frac{19}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n , $n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)} dx$. Determinați numărul
natural n , $n \geq 2$, pentru care $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $6 - 3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+2} = 5^x + 24$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 3.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul D mijlocul laturii AC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Arătați că dreptele MD și AB sunt paralele.
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC , în care $AC = 3$ și măsurile unghiurilor A și B sunt de 30° , respectiv 60° .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $A(z) = aI_3 + bB$, unde $z = a + ib$, cu a și b numere reale și $i^2 = -1$.
- 5p** a) Arătați că $\det B = i$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(z_1) \cdot A(z_2) = A(z_1 z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2 .
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i) \cdot A(2+i) \cdot A(3+i) \cdot A(1-i) \cdot A(2-i) \cdot A(3-i) = nI_3$.
2. Pe $M = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \log_2(2^{x+y} - 2^{x+1} - 2^{y+1} + 6)$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = \log_2((2^x - 2)(2^y - 2) + 2)$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Arătați că $x * x * x < 3x$, pentru orice $x \in M$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 + 3x + 1)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = (2 - x)(x^2 - x + 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - e^{-x}}{f(x) + e^{-x}} \right)^{f(x)e^x} = e^{-2}$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left| \frac{f(x)}{e^{-x}} - 1 \right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x-1)$.
- 5p a) Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)} dx = 10$.
- 5p b) Demonstrați că $F(\sqrt{7}) < F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f .
- 5p c) Determinați numărul real m , știind că $\int_3^5 f(x) dx = m(4 \ln 2 - 1)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 2 + i$. Arătați că $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 2 \log_2 \sqrt{x-2} = \log_2 x$. |
| 5p | 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A , acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea A . |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, -2)$, $B(3, 1)$ și $M(2, 4)$. Determinați coordonatele punctului N , știind că patrulaterul $ABMN$ este paralelogram. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC , în care $\sin(A+B) + \cos C = 1$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1)) = 0$. |
| 5p | b) Arătați că $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a , unde $B(a) = A(a) - A(0)$. |
| 5p | c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \leq 0$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \frac{z_1 + z_2}{4 \cdot z_1 z_2 + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $(-1) * 2 = \frac{1}{9}$. |
| 5p | b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”. |
| 5p | c) Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $ z * z = z $. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f . |

- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = m$ are exact două soluții.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 e^x f(x) dx = 12$.
- 5p** b) Arătați că orice primitivă G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ este convexă.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}} dx = \frac{a - \sqrt{2}}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $5(1+2i) - 2i(5-i) = 3$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 1 + a^2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x^2 + 1) = 2$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,6)$ și $C(4,2)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , astfel încât $BC = 10$ și $\sin B = 2 \sin C$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu $2\sqrt{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $(A(x) - I_3)(A(x) - I_3) = O_3$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(x) = xA(x) - (x-1)I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x+y)^2 - 2(x-y) - 3$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 2 = 5$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * (x+1) = 8$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m * n = 2mn$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5x + 10)\sqrt{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{e}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x + \frac{1}{e^x + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = e^2 + 1$.

5p b) Arătați că $\int_{-1}^1 e^x (f(x) - x - e^x) dx = 1$.

5p c) Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + i$. Arătați că $z(z - 2i) = 10$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Arătați că $f(2x) - 2f(x) = -1$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A , numărul $n + 5$ să fie multiplu de 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 0)$ și $B(5, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 4. Arătați că $BC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Pentru $a = -2$, arătați că $x_0 z_0 + y_0 = -2$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 3 = 18$.
- 5p** b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_6 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_1 = 3$ și $a_5 = 23$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(m, -1)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1} = 9 \cdot 3^{x+1}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul submulțimilor nevide ale mulțimii A , care au cel mult două elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 1)$ și $B(4, 4)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overline{OA} = \overline{BC}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 6$ și înălțimea $AD = 3$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 0$.
- 5p** b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) - A(xy) = (x + y - 2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale x și y pentru care $A(-1) \cdot A(3) \cdot A(x) = A(y)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 - 8X^2 + 3mX + m$, unde m este număr real.
- 5p** a) Pentru $m = 2$, arătați că $f(1) = 3$.
- 5p** b) Pentru $m = 0$, determinați rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați numărul rațional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3e^x}{x^2 + x + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{3e^x(x^2 - x)}{(x^2 + x + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = +\infty$.
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = m$ are exact trei soluții, pentru orice $m \in (e, 3)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + \ln(x + 1)$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln(x + 1)) dx = 9$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_0^{e-1} \frac{f(x) - 6x}{x+1} dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** | **c)** Determinați numărul real a , știind că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^2)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ este egală cu $a\pi + \ln 2$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numerele reale a și b pentru care $(a+bi)(1+i)=4$, unde $i^2=-1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+m$, unde m este număr real nenul. Determinați numerele reale m pentru care $f(m-x)=f(m+x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(2x)-1=\log_2(x^2+x+2)$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $F=\{f|f:A \rightarrow A\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un element f din mulțimea F , acesta să verifice inegalitatea $f(n) \leq n$, pentru orice $n \in A$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,3)$ și $B(-1,5)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{OC}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB=8$, măsura unghiului C de 30° și punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Determinați distanța de la punctul O la latura AB .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+ay-2z=b \\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c \\ (a+2)x-2y+z=-1 \end{cases}$, unde a , b și c sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0))=5$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a .
2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+8X-8$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(-1)=-15$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu $15X$.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr real a , polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=1-x-(x^4-1)\arctg x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x)=-x^2(4x\arctg x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x)) \geq f(x) \geq f(\operatorname{tg} x)$, pentru orice $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{1 + e^{-x}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 (1 + e^{-x}) f(x) dx = 8 + e^3$.

5p b) Arătați că $\int_{-m}^m \frac{f(x)}{x^2 + e^x} dx = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.

5p c) Determinați numărul real nenul a pentru care $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{ax} - 1} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = 1 - i$. Arătați că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care graficele funcțiilor f și g au exact un punct comun.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 + 9) = 2\lg(x\sqrt{10})$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de cel mult două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A , acesta să fie divizibil cu 9.
- 5p** 5. În triunghiul ABC , punctul M este mijlocul laturii AC , iar punctele D și E aparțin segmentului AB , astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{CB}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in [0, \pi]$ pentru care $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0 > y_0 > z_0$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Arătați că $x * (-x) \geq -x^2$, pentru orice $x \in M$.
- 5p** c) Determinați perechile (a, b) de numere din mulțimea M pentru care $a * b = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln(e^x + x^2)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .

2. Se consideră funcția $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x + 3}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) \sqrt{x + 3} \, dx = 12$.
- 5p b) Arătați că $\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} \, dx = 2$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} \, dx \leq \frac{\pi}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianța 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(2-i)^2 + i(4+i) = 2$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+3$. Determinați numărul real m pentru care $(f \circ f)(m) = 2m$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 10$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mari sau egale cu 7.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(3,-2)$ și $C(2a,a)$, unde a este număr real nenul. Arătați că dreptele AB și OC sunt perpendiculare, pentru orice număr real nenul a .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + 4 \cos \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax - y + 2az = 0 \\ x - 2y + az = 0 \\ x + y + (1-a)z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $a = -1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y^2 - 4(x+y)^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 1 = -3$.
- 5p** b) Arătați că $x * (-1) \leq 2x$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{5} - \ln(x^2 + x + 5)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 9x}{5(x^2 + x + 5)}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{x^3 + 8}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (x^3 + 8) f(x) dx = 8$.

- 5p** | **b)** Arătați că $\int_1^4 x f(x) dx = 4 \ln 2$.
- 5p** | **c)** Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x t \cdot f(t) dt \right)$.